Алгебры языков, представимых в отмеченных графах

Е. А. Пряничникова

В работе исследованы основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, и изучена взаимосвязь этой алгебры и алгебры языков, распознаваемых конечными автоматами. Показано, что класс языков, представимых регулярными выражениями рассматриваемой алгебры, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова. Доказано существование изоморфных подалгебр у рассмотренных алгебр. Получены отображения, позволяющие по регулярным выражениям одной алгебры переходить к регулярным выражениям другой алгебры, представляющим тот же язык. Показано, что алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, не является алгеброй Клини, и между этой алгеброй и алгеброй регулярных языков нет гомоморфизма.

Введение

В компьютерных науках широко применяются различные графовые модели, среди которых наиболее изученными являются графы с отмеченными дугами (автоматы). Удобным средством для представления языков, задаваемых графами с отмеченными дугами, является алгебра регулярных языков, позволяющая использовать алгебраические методы для решения прикладных задач, связанных с исследованием таких графов [1].

В настоящее время существуют актуальные задачи, которые естественным образом представляются в виде графов с отмеченными вершинами (в основном в робототехнике [2] и формальных методах разработки программ[3]). В работе [4] вводится алгебра, которая может быть использована при работе с языками, представимыми графами с отмеченными вершинами, аналогично тому, как алгебра регулярных языков используется для конечных автоматов. В связи с широким использованием графов с отмеченными вершинами, является актуальной задача исследования свойств введенной алгебры.

Цель данной работы состоит в сравнении структур и выразимости алгебры языков, распознаваемых конечными автоматами, и алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами.

Определения и обозначения

Назовем графом с отмеченными вершинами четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q - конечное множество вершин, $\mid Q \mid = n$, $E \subseteq Q \times Q$- множество дуг, X-конечный алфавит отметок вершин, $\mu : Q \to X$- функция отметок вершин. Пусть $I \subseteq Q$- множество начальных, а $F \subseteq Q$- множество финальных вершин графа G.

Путем в графе G будем называть конечную последовательность вершин $l = q1q2...qk$, где $(q_i, q_{i+1}) \in E$. Число k будем называть длиной, q_1 - начальной, а q_k - конечной вершиной пути l. Отметкой пути l будем называть последовательность отметок вершин $\mu(q_1)\mu(q_2)...\mu(q_k)$. Языком, порожденным вершиной q_i, назовем множество отметок всех путей в графе G, у которых начальной вершиной является вершина q_i, а конечная вершина принадлежит множеству финальных вершин. Множество отметок всех путей в графе G, начальные вершины которых принадлежат множеству I, а конечные - множеству F, назовем языком, порождаемым графом G, и обозначим $L(G)$.

Рассмотрим алгебру $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ со следующими операциями на языках $L, R \in 2^{X^+}$.

1) $L \cup R = \{w | w \in L$ или $w \in R\}$;
2) $L \circ R = \{w_1 \circ w_2 | w_1 \in L$ и $w_2 \in R\}$, где операция $\circ$ на множестве слов в конечном алфавите X определяется следующим образом: для всех $w_1, w_2 \in X^+$ и всех
$x, y \in X$

$$w_1 x \circ y w_2 = \begin{cases} w_1 x w_2, & \text{если } x = y; \\ \text{не определено}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

3) $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, где $L^0 = X$; $L^{n+1} = L^n \circ L$ для всех $n \geq 0$;
4)$L^{\otimes} = L_{beg} \circ L^* \circ L_{end}$, где $L_{beg} = \{x | xw \in L, x \in X, w \in X^*\}$; $L_{end} = \{x | wx \in L, x \in X, w \in X^*\}$.

Регулярные выражения в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ определим индуктивно:
1) $\emptyset$ является регулярным выражением;
2) x и xy является регулярными выражениями для всех $x, y \in X$;
3) если p и q - регулярные выражения, то выражения $(p \circ q)$, $(p \cup q)$, $(p^{\otimes})$ также являются регулярными.

Язык, обозначаемый регулярным выражением r, будем обозначать $L(r)$. Два регулярных выражения будем называть эквивалентными, если совпадают языки, которые они обозначают.

Обозначим множество всех регулярных выражений алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ через $\Re'$, множество всех регулярных выражений алгебры регулярных языков $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ через $\Re$.

Основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами

Рассматриваемая алгебра $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ является замкнутым идемпотентным полукольцом с одной дополнительной операцией итерации.

Утверждение. Класс языков, представимых регулярными выражениями алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова.

Данное утверждение основано на том, что в работе [1] было показано, что любой язык, порождаемый графом с отмеченными вершинами, представим регулярным выражением алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$, а в работе [4] доказывается, что язык порождается графом с отмеченными вершинами тогда и только тогда, он представим регулярным выражением алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$.

Теорема 1. У алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ есть подалгебры, изоморфные подалгебрам алгебры регулярных языков $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$.

Доказательство. Для любого символа алфавита $x \in X$ рассмотрим множество всех таких языков $L \in 2^{X^+}$, все слова которых начинаются и заканчиваются символом x. Это множество языков образует подалгебру алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$. Особенностью всех таких языков будет то, что результат применения к ним операции $\otimes$ будет содержать x, а $P \circ Q = \emptyset$ только в том случае, если $P = \emptyset$ или $Q = \emptyset$.

Каждому такому языку можно поставить в соответствие язык $L' \in 2^{X^*}$ таким образом, что для каждого слова $w \in L$, в язык L' входит слово w', полученное из слова w с помощью удвоения всех его символов, кроме первого и последнего. При этом символу x будет соответствовать пустое слово λ. Множество всех таких языков L' образует подалгебру алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$. Из свойств операции алгебр $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ и $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ следует, что рассмотренное отношение между подалгебрами является изоморфизмом.

Теорема 2. Существует отображение $\varphi : \Re \rightarrow \Re'$, сохраняющее языки, то есть для любого регулярного выражения p алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ есть регулярное выражение $p' = \varphi(p)$ алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, для которого $L(p') = L(p) - \{\lambda\}$.

Теорема 3. Существует такое отображение $\varphi : \Re' \to \Re$, что для любого регулярного выражения p алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ существует регулярное выражение $p' = \varphi(p)$ алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$, для которого $L(p') = L(p)$.

Наряду с общими чертами, алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, существенно отличается от алгебры регулярных языков. Как следствие этих особенностей, алгебра $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, в отличие от алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$, не является алгеброй Клини.

Основные отличия рассматриваемой алгебры от алгебр Клини связаны с тем, что, в отличие от конкатенации, операция $\circ$ частичная. Если в алгебре Клини $p \cdot q = \emptyset$ только в том случае, когда $p = \emptyset$ или $q = \emptyset$, то в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ легко подобрать примеры, когда это не верно: пусть $L(p) = \{ab\}$, $L(q) = \{cd\}$, тогда $p \circ q = \emptyset$.

Еще одно важное отличие заключается в том, что в алгебре Клини множество L^* всегда содержит пустое слово и является бесконечным для любого L, а в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ можно привести примеры множеств, для которых результат применения операции $\otimes$ будет бесконечным, конечным или пустым множеством: если $L(p) = \{aba\}$, то $L(p^{\otimes}) = \{a, aba, ababa, ...\}$; если $L(p) = \{ab\}$, то $L(p^{\otimes}) = \{ab\}$; если $p = \emptyset$, то $p^{\otimes} = \emptyset$.

Теорема 4. Не существует отображений алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ в алгебру $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ и алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ в алгебру $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, которые являются гомоморфизмами.

Выводы

В работе исследованы основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами. Показано, что класс языков, представимых регулярными выражениями этой алгебры, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова. Доказано существование изоморфных подалгебр у рассматриваемых алгебр. Получены отображения, позволяющие по регулярным выражениям одной алгебры переходить к регулярным выражениям другой алгебры, представляющим тот же язык. Показано, что алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, не является алгеброй Клини, и между этой алгеброй и алгеброй регулярных языков нет гомоморфизма. Все полученные результаты являются конструктивными.

Список литературы

[1] Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М., Наука, 1988.

[2] Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics. — Cambridge, Cambridge University Press, 2000.

[3] Baier C., Katoen J.-P. Principles of Model Checking. — Cambridge, MIT Press, 2008.

[4] Грунский И.С., Пряничникова Е.А. Об алгебре языков, представимых графами с отмеченными вершинами. // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. - 2009. - т.18. - С. 37-46.

Авторы

Елена Алексеевна Пряничникова — ассистент, кафедра программного обеспечения интеллектуальных систем, факультет Современных компьютерных информационных технологий, Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк, Украина; E-mail: *ginger701@mail.ru*