Невизначені величини та їх характеристики

О. І. Провотар, О. В. Лапко

В статті розглядаються різні способи описання невизначеної величини, а саме: ймовірнісний, через випадкову величину; можливістний, через нечітку величину, та змішаний, через нечітку випадкову величину. А також наводяться приклади задач, в яких можна побачити основні схожості та розбіжності способів опису.

Вступ

В [6] розглядалися експерименти, результати яких є невизначеними подіями. Проте часто виникає необхідність кількісного представлення результатів експерименту у вигляді деякої величини, яка називається невизначеною величиною. Невизначена величина є другим (після невизначеної події) основним об'єктом вивчення теорії невизначеності і забезпечує більш загальний спосіб опису досвіду з невизначеним результатом, чим сукупність невизначених подій. Розглядаючи експерименти з невизначеним результатом, ми маємо справу з невизначеними величинами. Так, число успіхів у серії з n випробувань - приклад невизначеної величини. Іншими прикладами невизначених величин є: число викликів на телефонній станції за одиницю часу, час очікування чергового виклику; число частинок із заданою енергією в системах частинок, що розглядаються в статистичній фізиці; середня добова температура в даній місцевості і т.д. Невизначена величина характерна тим, що неможливо точно передбачити її значення, яке вона прийме, але з іншого боку, множина її можливих значень зазвичай відома. Так для числа успіхів в послідовності з випробувань ця множина скінчена, оскільки число успіхів може приймати значення з множини $\{1, \ldots, n\}$. Множина значень невизначеної величини, може збігатися з дійсною пів віссю, як у випадку часу очікування і т.д.

Класична випадкова величина

Спочатку розглянемо класичний ймовірнісний апарат підрахунку нечіткості.

Нехай маємо ймовірнісний простір (Ω, U, P), де Ω- це простір елементарних подій, U - σ-алгебра на просторі елементарних подій, а – це класична міра ймовірності, тобто

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$
$$P(\Omega) = 1,$$
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ai), \text{ для будь-яких } i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

Числову функцію $\xi(w)$ від елементарної події $w \in \Omega$ будемо називати **випадковою величиною**, якщо для будь-якого дійсного x

$\{\xi \leq x\} = \{w : \xi(w) \leq x\} \in U$, тобто $\{\xi \leq x\}$ є подією.

Іншими словами випадкова величина – це числова функція $\Omega \to \Re$, яка вимірна стосовно σ - алгебри U.

Нечітка величина

Виходячи з [4,6], **нечіткою величиною** A будемо називати нечітку множину визначену на множині дійсних чисел, іншими словами це множина пар

$$A = \{(w, \mu_A(w)), w \in \Re\},$$

де $\mu_A : \Re \to [0,1]$ - функція належності нечіткої множини. Тобто функція $\mu_A : \Re \to [0,1]$ може бути визначена, як розподіл можливостей для нечіткої величини .

Так само, як і випадкова величина нечітка величина може бути дискретною та неперервною в залежності від міри належності.

Математичне сподівання дискретної нечіткої величини будемо визначати, як сума добутку значення елементу на його можливість поділена на потужність величини (сума всіх можливостей нечіткої величини), а саме:

$$M_A^* = \frac{\sum_{w \in \Omega} \mu_A(w) w}{\sum_{w \in \Omega} \mu_A}. \tag{1}$$

Математичне сподівання неперервної нечіткої величини знаходиться за допомогою співвідношення (1), але замість суми використовується інтегрування, тобто

$$M_A^* = \frac{\int_{w \in \Omega} w \mu_A(w) dw}{\int_{w \in \Omega} \mu_A(w) dw} \tag{2}$$

Нечітка випадкова величина

Розглянемо випадкову величину з Біноміальним розподілом, що зазвичай позначається як $b(m,p)$, де m- кількість незалежних експериментів , а p це ймовірність вдалого виконання експерименту. Такий розподіл дозволяє визначати, яка ймовірність виконання k- вдалих експериментів. За формулою:

$$P_k = {}_m^k p^k (1-p)^{m-k},$$

Але на практиці не завжди можна визначити точно p ймовірність вдалого виконання одного окремого експерименту, наприклад, якщо це значення буде визначатися рядом експертів. Пропонується визначати таку ймовірність не числом, а нечітким числом $\bar{p}$, для того щоб врахувати розбіжності думок експертів.

Виходячи з [4], нечітке число $\bar{A}$ – це випукла нечітка множина висотою 1, визначена на множині дійсних чисел $\mu_{\bar{A}} : \Re \to [0,1]$. Унімодальними називаються нечіткі числа, у яких міра належності дорівнює одиниці лише в одній точці. А толерантними називаються ті нечіткі числа, в яких міра належності дорівнює одиниці на проміжку точок. Для зручності унімодальні нечіткі числа будемо позначати трійкою чисел $(a/c/b)$, де (a,b) - інтервал, на якому міра належності нечіткого числа не дорівнює нулю, а c точка в якій міра належності дорівнює 1. Схожим чином будемо позначати й толерантні нечіткі числа але вже четвіркою чисел $(a/c/d/b)$, де (a,b) - так само інтервал, на якому міра належності нечіткого числа не дорівнює нулю, а (c,d) - інтервал, на якому міра належності дорівнює одиниці.

Для зручності нечіткі множини будемо описувати за допомогою α-перерізів. Відповідно до [4] α-перерізом нечіткої множини M називається звичайна множина вигляду

$$M[\alpha] = \{x, \mu_M(x) \geq \alpha\}.$$

α-перерізом нечіткого числа $\bar{A}$ є закритий обмежений інтервал $\bar{A}[\alpha]$ для всіх вигляду $\alpha \in [0,1]$. Будемо позначати нечіткі числа через α-переріз таким чином$\bar{A}[\alpha] = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, для всіх $\alpha \in [0,1]$, де $A_1(\alpha)(A_2(\alpha))$ монотонно зростаюча (спадаюча) функція від α при чому $A_1(1) \leq A_2(1)$.

Замінивши ймовірність окремого експерименту в випадковій величині X з Біноміальним розподілом на нечітке число $\bar{A}$ ми отримаємо в результаті, що закон розподілу теж буде описуватись нечітким числом. Тобто ймовірність станів випадкової величини буде визначатися таким чином

$$P_k[\alpha] = \{C_m^k t^k (1-t)^{m-k} | t \in \bar{A}[\alpha]\}, \textit{для всіх } \alpha \in [0,1],$$

де $\bar{A}[\alpha]$ - α-перерізом нечіткого числа $\bar{A}$, що описує ймовірність вдалого експерименту.

Випадкову величину, параметрами якої будуть нечіткі числа, будемо називати **нечіткою випадковою величину.** Розподіл ймовірностей такої випадкової величини теж є нечітким числом.

Математичне сподівання нечіткої випадкової величини знаходиться таким же самим способом, як і звичайної, але воно як і ймовірність теж буде нечітким числом.

Продемонструємо це на прикладі. Знайдемо математичне сподівання нечіткої випадкової величини $X \sim U(\bar{a}, \bar{b})$ розглянутої вище. Математичне сподівання для неперервної випадкової величини дорівнює інтегралу по всьому простору від функції щільності помноженої на значення випадкової величини, а оскільки для нечіткої випадкової величини математичне сподівання буде нечітким числом, шукатимемо відразу α-перерізи цього числа

$$M_X[\alpha] = \{\int_s^t (x/(t-s)dx | s \in \bar{a}[\alpha], t \in \bar{b}[\alpha], s < t\}, \ \textit{для всіх } \alpha \in [0,1].$$

Помітивши, що інтеграл буде завжди дорівнювати $(s+t)/2$, отримуємо, що математичне сподівання дорівнює середньому арифметичному двох нечітких чисел, а саме

$$M_X[\alpha] = (\bar{a} + \bar{b})/2,$$

для всіх $\bar{a}[0] = [s_1, s_2]$ та $\bar{b}[0] = [t_1, t_2]$ таких, що $s_2 < t_1$.

Приклад

На АТС кожну хвилину надходить певна кількість викликів. Ці виклики обробляються і комутуються. Знайти ймовірність(можливість) того, що за секунду апаратура АТС прийме менше 5 викликів. Позначимо цю подію X.

А). Припустимо, що інтенсивність надходження викликів за одну секунду становить 2. Застосуємо для цієї задачі випадкову величину розподілену за законом Пуассона з параметром 2. Як відомо у розподілі Пуассона ймовірність станів визначається наступним чином

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Тоді ймовірність надходження на АТС менше 5 викликів буде дорівнювати сумі ймовірностей обробити від 0 до 4-х викликів, тобто

$$P(X) = \sum_{k=0}^{4} P_k = \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{k!} e^{-2} = e^{-2}(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}) = 0.95$$

Б). Припустимо, що надходження викликів за одну секунду записується нечіткою множиною A з такою мірою належності елементів

$$\mu_A(0) = 0.3, \mu_A(1) = 0.4, \mu_A(2) = 0.5, \mu_A(3) = 0.6, \mu_A(4) = 0.6, \mu_A(5) = 0.7,$$

$$\mu_A(6) = 0.6, \mu_A(7) = 0.4, \mu_A(8) = 0.3, \mu_A(9) = 0.2, \mu_A(10) = 0.1$$

Застосуємо для цієї задачі нечітку величину X, визначену від 0 до 10 та розподілом можливостей таким, як міра належності множини A. Щоб знайти можливість надходження на АТС менше 5 викликів необхідно знайти максимум можливостей перших п'яти станів, тобто

$$\mu(X) = \max\{m_A(0), m_A(1), m_A(2), m_A(3), m_A(4)\} = 0.6$$

В). Припустимо, що інтенсивність надходження викликів за одну секунду неможливо визначити однозначно, але можна записати це значення у вигляді нечіткого числа $\bar{a} = (1/2/3)$. Застосуємо для цієї задачі нечітку випадкову величину розподілену за законом Пуассона з параметром $\bar{a} = (1/2/3)$. Як відомо у розподілі Пуассона ймовірність станів визначається наступним чином

$$\bar{P}_m = \frac{\bar{a}^m}{m!} e^{-\bar{a}}.$$

Тоді ймовірність надходження на АТС менше 5 викликів буде дорівнювати сумі ймовірностей обробити від 0 до 4-х викликів, тобто

$$\bar{P}(X) = \sum_{k=0}^{4} P_k = \sum_{k=0}^{4} \frac{\bar{a}^k}{k!} e^{-\bar{a}}$$

Але оскільки це нечітка випадкова величина то й ймовірність станів буде нечітким числом, будемо знаходити його через α-перерізи, тобто

$$\bar{P}(X)[\alpha] = \{\sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!} e^{-t} | t \in \bar{a}[\alpha]\} \text{ для всіх } \alpha \in [0,1].$$

Запишемо нечітке число $\bar{a} = (1/2/3)$ через α-перерізи $\bar{a}[\alpha] = [1+\alpha; 3-\alpha]$.
Отже шукана ймовірність буде дорівнювати

$$\bar{P}(X)[\alpha] = \{\sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!} e^{-t} | t \in [1+\alpha; 3-\alpha]\} = [\sum_{k=0}^{4} \frac{(3-\alpha)^k}{k!} e^{-(3-\alpha)}; \sum_{k=0}^{4} \frac{(1+\alpha)^k}{k!} e^{-(1+\alpha)}]$$

$$\text{для всіх } \alpha \in [0,1].$$

Висновки

У статті розглядаються різні способи описання невизначеної величини, а саме: ймовірнісний, через випадкову величину; можливістний, через нечітку величину та змішаний нечітка випадкова величина. Зручність способів описання невизначених величин досягається, в першу чергу, за допомогою використання апарату нечітких множин, який дозволяє виконувати обчислення ймовірності та можливості одних і тих же подій. Крім того, наводяться нові постановки задач і пропонуються відповідні моделі обчислення невизначеностей за допомогою невизначених величин. Розв'язок наведених у статті прикладів використовує як дискретний так і неперервний підходи в теорії нечіткості.

Передбачається, що запропоновані підходи в майбутньому можуть бути узагальнені і дослідженні на предмет оптимальності для певного класу задач. Планується також, розробити програмну систему, для обчислення різних типів невизначеностей.

Список літератури

[1] *Д. Рутковская, М.Пилиньский, Л.Рутковский.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Телеком, 2006. – 382 с.

[2] *J. Leski.* Systemy neuronowo-rozmyte. Warszawa: Naukowo-Techniczne, 2008. – 690 с.

[3] *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility //Fuzzy Sets ana Systems, 1978, N1, p. 3–28.

[4] *С. Мациевский* Нечеткие множества, г. Калининград, Издательство калининградского государственного университета, 2004, 176 с.

[5] *James J. Buckley* Fuzzy Probabilities. New approach and aplplications, Birmingham: Springer, 2005, 166 p.

[6] *Провотар А.И., Лапко А.В.* О некоторых подходах к вычислению неоределеностей

Автори

Олександр Іванович Провотар — доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра інформаційних систем, факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *aprowata@unicyb.kiev.ua*

Олександр Вікторович Лапко — аспірант 1-го року навчання, кафедра інформаційних систем, факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *mrolapko@gmail.com*