

Алгоритмы решения интегральных уравнений Вольтерры I-го рода методом разделяющихся ядер

Д. А. Верлань

В работе рассматривается группа алгоритмов и программ, обеспечивающая компьютерную реализацию метода разделяющихся ядер при решении интегральных уравнений Вольтерры I рода. С этой целью предложен и исследован метод аппроксимации ядер произвольного вида (как функции двух переменных) посредством суммы произведений пар функций одной независимой переменной. Это позволяет разработать в среде Matlab эффективные программные средства, сочетающие в себе предварительную процедуру аппроксимации ядра и последующие рекуррентные вычисления для решения указанных уравнений на основе применения квадратурных формул различного вида. Методика учитывает свойственную уравнениям Вольтерры I рода некорректность путем выбора шага дискретности. Предложены и реализованы алгоритмы могут быть применены как при решении линейных, так и нелинейных уравнений рассматриваемого класса.

Введение

В настоящее время наблюдается значительное расширение области приложения интегральных уравнений первого рода типа Вольтерры

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

где $y(s)$ - искомая функция, ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ - заданы. В круг многочисленных естественнонаучных приложений этого класса уравнений входят задачи восстановления сигналов, поступающих на входы измерительных приборов и систем наблюдения, которые ввиду реальности своих характеристик вносят искажения в наблюдаемые и регистрируемые данные. Решение подобных задач требует высокого быстродействия и "хорошей" точности компьютерных средств.

Замена интеграла квадратурными формулами, которая лежит в основе метода квадратур, представляет собой наиболее прямой, а в значительном числе практических случаев и наиболее эффективный путь подготовки уравнений Вольтерры к компьютерной реализации для их решения.

Основная часть

Если отрезок $[a, b]$ разбит на $n-1$ частей, выбраны узлы дискретизации $x = x_i, i = \overline{1, n}$, причем $x_1 = a$ и $x_n = b$, то линейное уравнение (1) преобразуется в выражение

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

из которого с помощью какой-либо квадратурной формулы получается система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = F_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

где A_j - коэффициенты некоторой квадратурной формулы, $K_{ij} = K(x_i, x_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}; f_i = F(x_i); y_i = \tilde{y}(x_i)$ - приближенные значения искомой функции в узлах x_i . Для реализации метода необходимо определить

$$y_1 = y(a) = \frac{f'(a)}{K(a, a)} = \frac{f'(a)}{K_{11}} \quad (4)$$

и использовать рекуррентное выражение

$$y_n = \frac{f'(a)}{A_n K_{nn}} \left(f_n - \sum_{j=1}^{n-1} A_j K_{nj} y_j \right), \quad A_i K_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

При использовании квадратурной формулы трапеций и постоянном шаге $h_i = h = \text{const}$ имеем

$$y_1 = \frac{f'(a)}{A_n K_{11}}, \quad y_i = \frac{2}{K_{ii}} \left(\frac{f_i}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j \right), \quad i = \overline{2, n}, \quad x_i = a + (i-1)h \quad (6)$$

$$A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j = 1; \\ 1 & \text{при } j > 1. \end{cases}$$

Общее свойство алгоритмов метода квадратур при решении уравнений Вольтерры I рода с произвольным ядром состоит в пропорциональной зависимости количества вычислений на шаге от номера шага, а операции предыдущего шага повторяются с новыми данными на следующем шаге и добавляется еще один член суммы.

Если же ядро в уравнении (1) разделяющееся (вырожденное), т. е. имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad l = \overline{1, m} \quad (7)$$

или возможна приближенная замена произвольного ядра разделяющимся, то можно построить алгоритм, для которого количество операций не зависит от номера узла дискретизации. С учетом (6) уравнение (1) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds = f(x), \quad x \geq 0. \quad (8)$$

Применяя к (7) соотношение (5), получаем рекуррентные выражения для решения уравнения (7):

$$\begin{cases} y(x_1) = y(a) = \frac{f'(a)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i(a) \beta_i(a)}, \\ y(x_i) = \frac{1}{A_i \sum_{i=1}^m \alpha_i(x_i) \beta_i(x_i)} \left(f(x_i) - \sum_{i=1}^m \alpha_i(x_i) \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_i(x_j) y(x_j) \right), \quad i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

При компьютерной реализации такого алгоритма не требуется большого объема памяти, сокращаются затраты машинного времени и уменьшаются ошибки округлений.

Для случая ядер $K(x, s)$ произвольного вида предлагается следующий метод их аппроксимации.

Вводится функционал

$$I = \int_a^b \int_a^b \left(K(x, s) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \beta_i(s) \right)^2 dx ds \quad (9)$$

и задача аппроксимации сводится к определению функций $\alpha_i(t)$, $\beta_i(s)$ посредством его минимизации.

Сначала находится первое приближение заданной функции в виде одного слагаемого аппроксимирующей суммы (при заданном начальном приближении $\beta_1^{(0)}(s)$) посредством итерационных выражений

$$\alpha_1^{(0)}(x) = \frac{\int_a^b K(x, s)\beta_1^{(0)}(s)ds}{\int_a^b (\beta_1^{(0)}(s))^2 ds}, \quad (10)$$

$$\beta_1^{(1)}(s) = \frac{\int_a^b K(x, s)\alpha_1^{(0)}(x)dx}{\int_a^b (\alpha_1^{(0)}(x))^2 dx}. \quad (11)$$

Определяются приближения $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(s)$ при выполнении условий

$$\int_a^b (\beta_1^{(n+1)}(s) - \beta_1^{(n)}(s))^2 \leq \varepsilon \text{ и } \int_a^b (\alpha_1^{(n+1)}(x) - \alpha_1^{(n)}(x))^2 \leq \varepsilon, \quad (12)$$

где ε показатель заданной точности вычислений.

Аналогичным образом приближается функция $K(x, s) - \alpha_1(x)\beta_1(s)$ произведением $\alpha_2(x)\beta_2(s)$ и т.д. пока не будет выполнено условие

$$\int_a^b \int_a^b \left(K(x, s) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)\beta_i(s) \right)^2 dx ds \leq \varepsilon_{apr}. \quad (13)$$

Таким образом, после N итераций получаем ряд $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x)\beta_i(s)$, который с заданной точностью аппроксимирует исходную функцию $K(x, s)$.

Выводы

Данный алгоритм аппроксимации имеет высокую скорость сходимости для широкого класса ядер и эффективно реализуется в программном виде. Работоспособность разработанных программ аппроксимации ядер и решения уравнений (1) иллюстрируется примерами.

Список літератури

- [1] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. — Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ - К.: Наук. думка, 1978. - 292с
- [2] Верлань А.Ф., Ефимов И.Е. — Комбинированный метод аппроксимации ядер интегральных уравнений. - Точность и надежность кибернет. систем, 1974, вып 2, с .68-74.
- [3] Колмогоров А.И. — О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и умножения - ДАН СССР, 1957, 114, №5, с. 953-956.
- [4] Шура-Бура М.Р. — Аппроксимация функций многих переменных функциями каждая из которых зависит от одного переменного - Вычислительная математика, 1957, сб. 2, с. 3-19.

Авторы

Дмитрий Анатольевич Верлань — студент 5-го курса, факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина; E-mail: dmitriverlan@gmail.com